Anwendungen der Differentialrechnung
II – Rekonstruktion von Funktionen – 23.03.-27.03.2020

II.2 – Eigenschaften zu rekonstruierender Funktionen: In der Hoffnung, dass es euch allen gut geht und ihr bei bester Gesundheit seid, kommen wir zum zweiten Abschnitt im Themengebiet „Rekonstruktion von Funktionen". Inhaltlich werden wir im Folgenden gar nichts Neues erarbeiten, sondern nur strukturieren bzw. ordnen.

Nichtsdestotrotz beginnen wir zum „Reinkommen" mit einer Aufgabe, deren Lösung ich im Anschluss noch einmal vorstellen würde. Bearbeitet diese zunächst selbstständig und vergleicht anschließend euren Lösungsweg mit dem Muster. Falls hierbei oder an anderer Stelle Fragen auftreten, so könnt ihr mir gerne eine Mail schreiben, die Mailadresse steht am Ende des Dokuments.

Beispiel 5 (CAS): Gesucht ist eine ganzrationale Funktion f vierten Grades mit einem Sattelpunkt im Ursprung und einem Tiefpunkt (-2|-6). Bestimme die Funktionsgleichung von f.

Lösung: **(1) Ansatz**

$f(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Zur Erinnerung:
In der Funktion f(x) sind 5 Koeffizienten (a, b, c, d, e) zu berechnen. Hierfür benötigen wir genau so viele bzw. fünf Gleichungen im Schritt (3), um eine eindeutige Lösung zu finden.

(2) Gegebene Eigenschaften

1. Sattelpunkt im Ursprung
2. Tiefpunkt (-2;-6)

(3) Umsetzen in Gleichungen

1. $f(0) = 0$ (Ansatz: Ursprung liegt auf Graph
2. $f'(0) = 0$ (Ansatz: 1. Bedingung Sattelpunkt
3. $f''(0) = 0$ (Ansatz: 2. Bedingung Sattelpunkt
4. $f(-2) = -6$ (Ansatz: Punkt (-2|-6) liegt auf Graph)
5. $f'(-2) = 0$ (Ansatz: Bedingung Minimum

Bedingungen Sattelpunkt:
Eine Funktion f hat bei x_S eine Sattelstelle, wenn gilt:
(I) $f'(x_S) = 0$
(II) $f''(x_S) = 0$

(4) Lösen

CAS: Ergebnis: $\underline{f(x) = 1{,}125\,x^4 + 3\,x^3}$

Weiter geht es mit einer Übung in der folgenden Tabelle. Diese hat zum Ziel, das Formulieren bzw. Interpretieren von mathematischen Informationen zu trainieren.

In der linken Spalte findet ihr wie in Schritt (2) der Musterlösung auf S.1 eine Information in Umgangssprache ausformuliert, in der rechten Spalte sollen wie in Schritt (3) die hierzu passenden mathematischen Ausdrücke (bzw. formale Ausdrücke) stehen. Füllt also die leeren Zellen der Tabelle mit den richtigen Ausdrücken für die Funktion f. Auf der folgenden Seite (S.4) findet ihr hierzu die Lösungen.

AB 6

Umgangssprache	**Formale Sprache**
An der Stelle x = 5 besitzt die Funktion f eine Wendestelle.	
Der Graph einer ganzrationalen Funktion berührt bei x = 3 die x-Achse.	
	1. f(42) = 7 2. f(42) = -15
Die Nullstelle x_0 = 3 der Funktion f ist zugleich eine Extremstelle.	
Der Graph einer Funktion berührt bei x = 2 die Gerade g(x) = -4 x + 0,5.	
	1. f(0) = 9 2. f‘‘(0) = 6
	1. f(0) = 0 2. f‘(0) = 0
Eine ganzrationale Funktion fünften Grades ist symmetrisch zum Koordinatenursprung. *Gib hier nur die Funktionsgleichung mit den gesuchten Koeffizienten an*	
Eine ganzrationale Funktion vierten Grades ist symmetrisch zur y-Achse. *Gib hier nur die Funktionsgleichung mit den gesuchten Koeffizienten an*	

Musterlösung AB 6

Umgangssprache	Formale Sprache
An der Stelle $x = 5$ besitzt die Funktion f eine Wendestelle.	**1. $f''(5) = 0$**
Der Graph einer ganzrationalen Funktion berührt bei $x = 3$ die x-Achse.	**1. $f(3) = 0$** **2. $f'(3) = 0$**
Die Funktion hat im Punkt (42|7) einen Anstieg von -15.	1. $f(42) = 7$ 2. $f(42) = -15$
Die Nullstelle $x_0 = 3$ der Funktion f ist zugleich eine Extremstelle.	**1. $f(3) = 0$** **2. $f'(3) = 0$** **(vergleiche mit ...**
Der Graph einer Funktion berührt bei $x = 2$ die Gerade $g(x) = -4x + 0{,}5$.	**1. $f(2) = g(2)$** **2. $f'(2) = g'(2)$**
Die Ableitung der Funktion f‘ besitzt im Punkt (0|9) den Wert 6.	1. $f(0) = 9$ 2. $f''(0) = 6$
Im Koordinatenursprung besitzt die Funktion ein Hochpunkt.	1. $f(0) = 0$ 2. $f'(0) = 0$
Eine ganzrationale Funktion fünften Grades ist symmetrisch zum Koordinatenursprung. *Gib hier nur die Funktionsgleichung mit den gesuchten Koeffizienten an*	**$f(x) = a x^5 + b x^3 + c x$**
Eine ganzrationale Funktion vierten Grades ist symmetrisch zur y-Achse. *Gib hier nur die Funktionsgleichung mit den gesuchten Koeffizienten an*	**$f(x) = a x^4 + b x^2 + c$**

Wie es bei den Extremwertaufgaben das Finden der Haupt- und Nebenbedingungen war, was die wahre Herausforderung darstellt, so ist es das Interpretieren und Formulieren der gegebenen Informationen bei Rekonstruktionsaufgaben. Es scheint daher sinnvoll, eine Übersicht über die umgangssprachlichen Informationen und deren formales Pendant zu erstellen… Und das wird im Folgenden eure Aufgabe sein.

Arbeitsauftrag:
Erstelle eine zusammenfassende Übersicht über die möglichen Eigenschaften von Funktionen und deren Umsetzung in mathematischen Gleichungen.

Finde hierfür ein für dich geeignetes Format. (Input: Mindmap, Tabelle, Schaubild, etc.)

Beziehe dich dabei auf alle bis dato bearbeiteten Aufgaben und das Lehrbuch S.166 ff.

Sende deine Übersicht in einem geeigneten Dateiformat (Foto-jpeg, Dokument-pdf) an die aufgeführte E-Mailadresse bis 15:00 Uhr, Freitag den 27.03.2020.

Es folgen weitere Aufgaben zur Funktionsrekonstruktion – diesmal in anwendungsbezogeneren Kontexten. Bearbeitet diese selbstständig mit dem CAS. Die Lösungen und Lösungsansätze findet ihr auf der nächsten Seite.

LB. S. 172 /10a-c
LB. S. 173 / 13, 14
LB. S. 174 / 16a-d

Lösungshinweise:

10) a) → der Ball landet auf der Torlinie, d.h. den Gipfel erreicht der Ball genau in der Mitte zwischen Abschussstelle und Torlinie
    c) → Welche Beziehung zwischen Anstiegswinkel und Anstieg galt für eine Funktion?

13) a) → gegebene Informationen: 3 Punkte auf dem Graphen

14) a) → Was bedeutet „horizontal verlaufen“ hinsichtlich des Anstiegs einer Funktion?
    b) → Was bedeutet „am steilsten“ hinsichtlich des Anstiegs einer Funktion?

16) a) → welche „besonderen Punkte“ findest du in der Skizze, schaue oben in die Tabelle und deine Zusammenfassung
    b) → Wir nehmen an, dass der Skizze entsprechend der Abstand zwischen den Fenstern immer 10m beträgt

---

Lösungen:

10a) $f(x) = -0{,}02\,x^2 + x$
  b) $f(47) = 2{,}82$ m → Der Torwart kommt nicht an den Ball.
  c) $\tan(\alpha) = 1 \rightarrow \alpha = 45°$

13a) $B(v) = 0{,}001v^2 + -0{,}1v + 10$
  b) Minimumstelle von B(v): $x_{Min}=50$
  c) $12{,}4 = B(v) \rightarrow v_1=-20$ (entfällt, denn Benzinverbrauch ist positiv), $v_2=120$.

14a) siehe LB (Kontrollergebnis)
  b) Gesucht ist der minimale Anstieg (weil Abhang), also das Minimum der 1. Ableitung, also der Wert der 1. Ableitung an der Wendestelle –--
  $f''(x) = 0$, Wendestelle ist bei $x_W=-2$, $f'(-2) = -0{,}75$. Antwort: Der Abhang ist maximal -0,75 steil.
  Für g ist der maximale Wert der 1.Ableitung gesucht: CAS fMax: $x_{ges}=5$

16a) Informationen: (1) $f(10) = 6$, (2) $f'(10)=0$, (3) $f'(30) = 0$, (4) $f''(20) = 0$
  Ergebnis: f(x) =
  b) Informationen: (1) $g(40) = f(40)$, (2) $g'(40)=0$, (3) $g(50) = 10$
  Ergebnis: g(x) =
  c) Höhe = Gebäudehöhe + Dachhöhe = 10m + f(30) =
  d) f‘(0) = , g‘(50) = , Dachspitze von links f‘(40) = , von rechts $g'(40) = 0$

Zunächst einmal viel Erfolg bei den Aufgaben. Für Rückfragen etwaiger Art stehe ich gerne zur Verfügung. Stelle diese einfach an fragen.schlegel@gmail.com

Bleibt gesund und haltet durch.

Herzliche Grüße

M. Schlegel